Ejercicios operaciones con subespacios

Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S y T dos subespacios de $\mathbb{V}$.

- La intersección de S y T es:

$$S \cap T = \{v \in \mathbb{V} / v \in S \ y \ v \in T\}$$

  El subespacio $S \cap T$ es el mayor subespacio contenido simultáneamente en los subespacios S y T.

- La suma de S y T es:

$$S + T = \{v \in \mathbb{V} /\ v = v_1 + v_2,\ para\ v_1 \in S\ y\ v_2 \in T\}$$

  El subespacio suma $S + T$ es el menor subespacio que contiene simultámente a S y a T.

- Si $B_S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de S y $B_T = \{w_1, \cdots, w_m\}$ es una base de T entonces

$$S + T = gen\{u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_m\}$$

- Si $S \cap T = \{0_{\mathbb{V}}\}$, diremos que la suma de S y T es directa y la notaremos $S \oplus T$.

- El teorema de la dimensión establece la siguiente fórmula que relaciona las dimensiones de $S + T$, $S \cap T$, S y T:

$$dim(S + T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T)$$

1. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ x - y + z = 0\}$ y $T = gen\{(1\ -1\ 0)^T, (2\ 1\ 1)^T\}$.

   a) Hallar $S \cap T$ y $S + T$.

   b) Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ que contenga a una base de S y a una base de T.

   c) Hallar las coordenadas de $w = (1\ -1\ 2)^T$ en la base B.

   d) Hallar un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $S \oplus W = \mathbb{R}^3$.

   a) Los vectores $v \in S \cap T$ verifican $v \in S$ y $v \in T$.
   Un vector v pertenece a T si y sólo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \alpha(1\ -1\ 0)^T + \beta(2\ 1\ 1)^T = (\alpha + 2\beta\ \ -\alpha + \beta\ \ \beta)^T$$

   Veamos que condición tienen que cumplir α y β para que estos vectores pertenezcan a S:

$$v \in S \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$(\alpha + 2\beta) - (-\alpha + \beta) + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$

   Entonces los vectores de $S \cap T$ son de la forma:

$$v = (-\alpha\ \ -2\alpha\ \ -\alpha)^T = (-\alpha)(1\ 2\ 1)^T$$

   La intersección es

$$S \cap T = gen\{(1\ 2\ 1)^T\}$$

Una base de $S \cap T$ es $B_{S\cap T} = \{(1\ 2\ 1)^T\}$ y $dim(S \cap T) = 1$.
Usando el teorema de la dimensión:

$$dim(S+T) = dim(S) + dim(T) - dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Como $S + T \subseteq \mathbb{R}^3$ y $dim(S+T) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, entonces $S + T = \mathbb{R}^3$.

b) Buscamos una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo que dos de esos vectores formen una base de S y dos de ellos formen una base de T. Podemos tomar estos vectores de la forma $v_1 \in S$, $v_2 \in S \cap T$ y $v_3 \in T$.
Por ejemplo, $v_1 = (1\ 1\ 0)^T$, $v_2 = (1\ 2\ 1)^T$ y $v_3 = (1\ -1\ 0)^T$.
El conjunto $B = \{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T, (1\ -1\ 0)^T\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que tiene 3 vectores y es un conjunto de generadores de $S + T = \mathbb{R}^3$. Por lo tanto también es un conjunto LI.

c) Busquemos las coordenadas de $w = (1\ -1\ 2)^T$ en la base B. Dichas coordenadas son $[w]^B = (a\ b\ c)^T$ tales que

$$w = a(1\ 1\ 0)^T + b(1\ 2\ 1)^T + c(1\ -1\ 0)^T$$

Para hallarlas hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + 2b - c = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $a = -3$, $b = 2$, $c = 2$.
Luego, $[w]^B = (-3\ 2\ 2)^T$.
También podemos hallar las coordenadas de w a través de la matriz de cambio de base M_E^B, donde E es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, ya que

$$M_E^B [w]^E = [w]^B$$

Recordemos que

$$M_E^B = (M_B^E)^{-1}$$

La matriz M_B^E es fácil de calcular ya que

$$M_B^E = ([v_1]^E [v_2]^E [v_3]^E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos

$$M_E^B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[w]^B = M_E^B [w]^E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d) Buscamos un subespacio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $S \oplus W = \mathbb{R}^3$. Primero veamos cual debe ser la dimensión de W. Tenemos que:

$$3 = dim(\mathbb{R}^3) = dim(S \oplus W) = dim(S) + dim(W) - dim(S \cap W) = 2 + dim(W)$$

Entonces $dim(W) = 1$.
Necesitamos una base de S, por ejemplo, $B_S = \{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T\}$.
Vamos a proponer un subespacio $W = gen\{v\}$ de modo tal que

$$S + W = gen\{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T, v\} = \mathbb{R}^3$$

Así que elegimos v de modo que el conjunto $\{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T, v\}$ sea LI. Por ejemplo: $v = (0\ 0\ 1)^T$.
Verificamos la independencia lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$S + W = gen\{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T, (0\ 0\ 1)^T\}$$

tiene dimensión 3 ya que $\{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 1)^T, (0\ 0\ 1)^T\}$ es una base de $S + W$ (genera $S + W$ y es un conjunto LI).
Como $S + W \subseteq \mathbb{R}^3$ y $dim(S + W) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, entonces $S + W = \mathbb{R}^3$. Además, por el teorema de la dimensión resulta que $dim(S \cap W) = 0$ así que $S \cap W = \{(0\ 0\ 0)^T\}$ y la suma es directa, es decir, $S \oplus W = \mathbb{R}^3$.

2. Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = gen\{(0\ 0\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 0\ -1)^T\}$$

$$S_2 = gen\{(1\ 3\ 0\ 0)^T, (0\ 2\ 1\ 1)^T\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^4 /\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\}$$

Hallar un subespacio $T \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que

$$S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = H$$

Para que exista un subespacio T tal que $S_1 \oplus T = H$, es necesario que $S_1 \subseteq H$ y $T \subseteq H$. Análogamente, es necesario que $S_2 \subseteq H$ y $T \subseteq H$ para que $S_2 \oplus T = H$.

Necesitamos verificar primero que $S_1 \subseteq H$ y $S_2 \subseteq H$. Para ello veremos que los generadores de S_1 y S_2 pertenecen a H.

Comencemos con los generadores de S_1:

- $(0\ 0\ 1\ 0)^T \in H$ ya que $3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0$.
- $(1\ 1\ 0\ -1)^T \in H$ ya que $3 \cdot 1 - 1 + 2(-1) = 0$

Por lo tanto, $S_1 \subseteq H$.

Ahora vamos a chequear los generadores de S_2:

- $(1\ 3\ 0\ 0)^T \in H$ ya que $3 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot 0 = 0$.
- $(0\ 2\ 1\ 1)^T \in H$ ya que $3 \cdot 0 - 2 + 2 \cdot 1 = 0$

Tenemos entonces que $S_2 \subseteq H$.

Observemos que $dim(S_1) = dim(S_2) = 2$ y $dim(H) = 3$, entonces $dim(T) = 1$ ya que, para que resulte una suma directa, $dim(S_i \cap T) = 0$ para $i = 1, 2$. Entonces:

$$3 = dim(H) = dim(S_i \oplus T) = dim(S_i) + dim(T) - dim(S_i \cap T) = 2 + dim(T)$$

para $i = 1, 2$.

Luego $dim(T) = 1$.

Debemos proponer un subespacio $T = gen\{v\}$, con $v \in H$, de modo que

$$H = gen\{(0\ 0\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 0\ -1)^T, v\} = gen\{(1\ 3\ 0\ 0)^T, (0\ 2\ 1\ 1)^T, v\}$$

Por ejemplo, $T = gen\{(0\ 2\ 0\ 1)^T\}$.

Notemos que $(0\ 2\ 0\ 1)^T$ verifica la ecuación que define a H ya que $3 \cdot 0 - 2 + 2 \cdot 1 = 0$. Luego $T \subseteq H$.

Verifiquemos que $S_1 \oplus T = H$, ésto es, que $S_1 + T = H$ y $S_1 \cap T = \{(0\ 0\ 0\ 0)^T\}$

Tenemos que

$$S_1 + T = gen\{(0\ 0\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 0\ -1)^T, (0\ 2\ 0\ 1)^T\}$$

Observemos que el conjunto $\{(0\ 0\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 0\ -1)^T, (0\ 2\ 0\ 1)^T\}$ es LI y genera $S_1 + T$, por lo tanto es una base de $S_1 + T$ y $dim(S_1 + T) = 3$.

Como $S_1 + T \subseteq H$, ya que $S_1 \subseteq H$ y $T \subseteq H$, y $dim(H) = dim(S_1 + T) = 3$ resulta que $S_1 + T = H$.

Por otro lado, como $dim(S_1 + T) = 3$, $dim(S_1) = 2$ y $dim(T) = 1$, reemplazando en la fórmula de la dimensión del subespacio suma, tenemos que $dim(S_1 \cap T) = 0$ y por lo tanto, $S_1 \cap T = \{(0\ 0\ 0\ 0)^T\}$.

La misma verificación se hace para comprobar que $S_2 \oplus T = H$.

Tenemos que

$$S_2 + T = gen\{(1\ 3\ 0\ 0)^T, (0\ 2\ 1\ 1)^T, (0\ 2\ 0\ 1)^T\}$$

Observemos que el conjunto $\{(1\ 3\ 0\ 0)^T, (0\ 2\ 1\ 1)^T, (0\ 2\ 0\ 1)^T\}$ es LI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además este conjunto genera S_2+T, por lo tanto es una base de S_2+T y $dim(S_2+T) = 3$.

Como $S_2 + T \subseteq H$, ya que $S_2 \subseteq H$ y $T \subseteq H$, y $dim(H) = dim(S_2 + T) = 3$ resulta que $S_2 + T = H$.

Por otro lado, como $dim(S_2 + T) = 3$, $dim(S_2) = 2$ y $dim(T) = 1$, reemplazando en la fórmula de la dimensión del subespacio suma, tenemos que $dim(S_2 \cap T) = 0$ y por lo tanto, $S_2 \cap T = \{(0\ 0\ 0\ 0)^T\}$.